研 究 論 文

長い桁の特殊な整数の性質について

瀧川　真也＊　・　西　晃央＊＊

On the Properties of Some Special Integers with Long Digits

Shin-ya TAKIGAWA＊ and Akihiro NISHI＊＊

【要約】
「整数の性質」に関する教育内容の研究を意図して，各桁に同じ数字1, 3, 9が並ぶ長い桁の整数11…1, 33…3, 99…9に着目し，それらが与えられた整数で割り切れるときの桁数の間の関係を導く。また，分母が2と5以外の素因数をもつような既約分数について考察し，小数展開したときの循環節の長さは最小循環節の長さの倍数であり，最小循環節の長さは分母のみによって決まるという循環節の長さの持つ性質について述べる。更に，与えられた数を基本周期とする真分数の個数を求める。

【キーワード】　長い桁，整数，循環節，基本周期，Möbiusの反転公式

1．はじめに

現在の学習指導要領では，小学校算数科で約数，倍数，素数などが指導され，高等学校数学Aでは「整数の性質」という単元が新設されて，ユークリッドの互除法や二元一次不定方程式の整数解が扱われるようになっているなど，整数の学習内容が増加している。整数の中でも，各桁に同じ数字が並ぶものの中には不思議な性質が潜んでおり，例えば $37 \times 3 = 111$, $12345679 \times 9 = 111111111$ のような計算は小学校でも取り扱われる。『とっておきの数学パズル』（ピーター・ウィンクラー著）には，n が 2 や 5 の倍数でない限り，すべての桁が 1 である n の倍数が存在することが述べられているし，1 が n 個並んだ整数と n との関係については，2010 年の東京大学の入試問題でも取り上げられた。

本稿では，b を 2 や 5 の倍数でない 3 以上の整数とし，$\overbrace{11\cdots1}^{f\text{個}}, \overbrace{33\cdots3}^{g\text{個}}, \overbrace{99\cdots9}^{h\text{個}}$ が b の倍数になるような桁数 f, g, h のもつ性質について考察する。f, g, h の最小値をそれぞれ f_0, g_0, h_0 とするとき，f, g, h はそれぞれ f_0, g_0, h_0 の倍数として得られることを示し，f_0, g_0, h_0 の間の関係についても述べる。算数・数学の範囲で理解できる具体的な整数，分数を用いた例を挙げて，これらの性質を確認する。

また，$99\cdots9 = b \times x$（x は整数）となっているなら，$\dfrac{1}{b} = \dfrac{x}{99\cdots9}$ となるが，x は右辺を小数展開したときの循環節になることから，$\overbrace{99\cdots9}^{h\text{個}}$ が b の倍数になるような桁数 h は $\dfrac{1}{b}$ の循環節の長さと関係がある。

一般に既約分数を小数展開したとき，分母の素因数が 2 または 5 のみであれば有限小数，分母が 2 または 5 と他の素因数をもてば混循環小数，2 及び 5 以外の素因数のみをもてば純循環小数になることは，良く知られている。混循環小数になるとき，非循環節の長さは 2 のべき指数と 5 のべき指数の

＊佐賀大学文化教育学部
＊＊福岡女学院大学人間関係学部

大きい方の値である。従って，循環節の長さを考察する際には，分母の素因数から 2 及び 5 を除いておいてよい。以下では，既約分数の分母は 2 でも 5 でも割り切れないものとし，その分数を小数展開したときの循環節の長さは最小循環節の長さの倍数であり，最小循環節の長さは分母のみによって決まることを証明する。

2. 各桁に同じ数字 1, 3, 9 を並べてできる長い桁の整数がもつ性質

b を 2 と 5 を素因数にもたない 3 以上の整数とする。1 を f 個並べてできる数 $11\cdots1$ が b で割り切れるような自然数 f の集合を F とする。同様に, $33\cdots3$, $99\cdots9$ が b で割り切れるような $33\cdots3$ の桁数, $99\cdots9$ の桁数の集合を，それぞれ G, H とする。

〔補題1〕 F, G, H は空集合ではない。

証明） $F\neq\phi$ を示す。b で割ったあまりが $k(0\leqq k\leqq b-1)$ であるような自然数の集合を N_k とする。それぞれの自然数はいずれかひとつの N_k に属し，1 を並べてできる自然数は無限にあるから，鳩の巣原理により，このうちどれか 2 つは同じ N_k に属するようにできる。$\overbrace{11\cdots1}^{f_1個}$, $\overbrace{11\cdots1}^{f_2個}$ が N_k に属する $(f_1>f_2)$ とすると，差を考えて $\overbrace{11\cdots1}^{f_1-f_2個}\overbrace{00\cdots0}^{f_2個}$ が b で割り切れる。$\overbrace{11\cdots1}^{f_1-f_2個}\times\overbrace{100\cdots0}^{f_2個}=bs$ (s は自然数) と書けるが, $\overbrace{100\cdots0}^{f_2個}=2^{f_2}\cdot5^{f_2}$ であり，b が 2 と 5 を因数にもたないから，$s=\overbrace{100\cdots0}^{f_2個}\cdot s_1$ (s_1 は自然数) となる。よって，$\overbrace{11\cdots1}^{f_1-f_2個}=bs_1$ となり，$f_1-f_2\in F$ がいえる。$33\cdots3$, $99\cdots9$ についても同様。（証明終わり）

集合 F, G, H に属する自然数の最小値を，それぞれ f_0, g_0, h_0 とおく。$f\in F$ なら，自然数 s を使って $\overbrace{11\cdots1}^{f個}=bs$ と表せる。このとき, $\overbrace{33\cdots3}^{f個}=3bs$ だから $f\in G$ である。よって $F\subset G$。同様にして, $G\subset H$ が成り立つ。従って，$f_0\geqq g_0\geqq h_0$ となる。

以下では，$\overbrace{11\cdots1}^{f_0個}=bs_0, \overbrace{33\cdots3}^{g_0個}=bt_0, \overbrace{99\cdots9}^{h_0個}=bu_0$ とおく。

〔補題2〕 $F=\{jf_0\,|\,j=1, 2, \cdots\}$, $G=\{jg_0\,|\,j=1, 2, \cdots\}$, $H=\{jh_0\,|\,j=1, 2, \cdots\}$ である。更に, f_0 は g_0 で, g_0 は h_0 で割り切れる。

証明） $b\geqq3$ より $f_0\geqq2$ である。集合 F に属する自然数 f をとり，f を f_0 で割った商とあまりをそれぞれ q, r とする。即ち，$f=f_0q+r, 0\leqq r\leqq f_0-1$ である。$f\in F$ より，$\overbrace{11\cdots1}^{f個}$ は b の倍数である。一方，もし $r>0$ なら，$\overbrace{11\cdots1}^{f個}=\overbrace{11\cdots1}^{f_0個}\overbrace{11\cdots1}^{f_0個}\cdots\overbrace{11\cdots1}^{f_0個}\overbrace{11\cdots1}^{r個}$ となる。$\overbrace{11\cdots1}^{f_0個}=bs_0$ だから,

$\overbrace{11\cdots1}^{f個}=bs_0\left(10^{f_0(q-1)}+10^{f_0(q-2)}+\cdots+1\right)\times10^r+\overbrace{11\cdots1}^{r個}$。よって，$\overbrace{11\cdots1}^{r個}$ は b の倍数となり，$r<f_0$ より f_0 の

定義に矛盾する。ゆえに $r = 0$, 即ち f は f_0 で割り切れる。また，jf_0(j は自然数)が F に属することも，上の証明からわかる。

$g_0 = 1$ なら $b = 3$ となり，集合 G は自然数の全体と一致する。$g_0 \geqq 2$ のときは，F の場合と同様に考える。H についても同様。

次に，f_0 が g_0 で割り切れることを示す。$g_0 \geqq 2$ としてよい。$f_0 = g_0 q + r\,(0 \leqq r \leqq g_0 - 1)$ とし，$r > 0$ と仮定して矛盾を導く。$\overbrace{33\cdots3}^{f_0\text{個}} = \overbrace{33\cdots3}^{g_0\text{個}}\overbrace{33\cdots3}^{g_0\text{個}}\cdots\overbrace{33\cdots3}^{g_0\text{個}}\overbrace{33\cdots3}^{r\text{個}}$ であるが，$\overbrace{33\cdots3}^{g_0\text{個}} = bt_0$ より，

$\overbrace{33\cdots3}^{f_0\text{個}} = bt_0\left(10^{g_0(q-1)} + 10^{g_0(q-2)} + \cdots + 1\right) \times 10^r + \overbrace{33\cdots3}^{r\text{個}}$。他方，$\overbrace{33\cdots3}^{f_0\text{個}} = 3 \times \overbrace{11\cdots1}^{f_0\text{個}} = 3bs_0$ だから，$\overbrace{33\cdots3}^{r\text{個}}$ が b の倍数となり g_0 の定義に反する。g_0 が h_0 で割り切れることも同様。(証明終わり)

〔定理1〕 $f_0 \leqq 3g_0,\ g_0 \leqq 3h_0$ が成り立つ。

証明） $\overbrace{33\cdots3}^{g_0\text{個}} = bt_0$ だから，$\overbrace{33\cdots3}^{3g_0\text{個}} = \overbrace{33\cdots3}^{g_0\text{個}}\overbrace{33\cdots3}^{g_0\text{個}}\overbrace{33\cdots3}^{g_0\text{個}} = bt_0(10^{2g_0} + 10^{g_0} + 1) = bt_0 \times 1\overbrace{00\cdots0}^{g_0-1\text{個}}1\overbrace{00\cdots0}^{g_0-1\text{個}}1$。

$1\overbrace{00\cdots0}^{g_0-1\text{個}}1\overbrace{00\cdots0}^{g_0-1\text{個}}1$ は 3 の倍数だから，これを 3λ とおく。両辺を 3 で割って，$\overbrace{11\cdots1}^{3g_0\text{個}} = bt_0\lambda$。右辺は b の倍数だから $3g_0 \in F$ となり，$f_0 \leqq 3g_0$ を得る。

次に，$\overbrace{99\cdots9}^{h_0\text{個}} = bu_0$ より，$\overbrace{99\cdots9}^{3h_0\text{個}} = \overbrace{99\cdots9}^{h_0\text{個}}\overbrace{99\cdots9}^{h_0\text{個}}\overbrace{99\cdots9}^{h_0\text{個}} = bu_0(10^{2h_0} + 10^{h_0} + 1)$ である。上と同様にして，

$10^{2h_0} + 10^{h_0} + 1$ は 3 の倍数であることがいえるので，これを 3μ とおく。一方，$\overbrace{99\cdots9}^{3h_0\text{個}} = 3 \cdot \overbrace{33\cdots3}^{3h_0\text{個}}$ より

$\overbrace{33\cdots3}^{3h_0\text{個}} = b\mu u_0$ となり，$3h_0 \in G$。よって $g_0 \leqq 3h_0$ を得る。(証明終わり)

〔定理1〕の例を挙げる。

(1) $b = 9$ のとき，$h_0 = 1$ である。3, 33 は 9 の倍数でなく，$333 = 9 \times 37$ は 9 の倍数なので，$g_0 = 3$。111111111 は 9 の倍数であり，$\overbrace{11\cdots1}^{k\text{個}}\ (1 \leqq k \leqq 8)$ は 9 の倍数にならないから，$f_0 = 9$ となり，定理 1 が成り立っている($f_0 = 3g_0,\ g_0 = 3h_0$ が成立する)。

(2) $b = 3$ のとき，$g_0 = 1$ である。また，9 は 3 の倍数だから，$h_0 = 1$ である。1, 11 は 3 の倍数でなく，$111 = 3 \times 37$ は 3 の倍数だから $f_0 = 3$ となり，定理 1 が成り立っている($f_0 = 3g_0,\ g_0 = h_0$ が成立する)。

(3) $b = 21$ とする。$\dfrac{1}{21} = 0.\dot{0}4761\dot{9} = \dfrac{47619}{999999}$ より，$999999 = 21 \times 47619$ である。また，$\dfrac{1}{21}$ の循環節の長さが 6 なので，$\overbrace{99\cdots9}^{k\text{個}}\ (1 \leqq k \leqq 5)$ は 21 では割り切れない。即ち $h_0 = 6$ である。あとで述べる命題 1 より $g_0 = h_0$ なので，$g_0 = 6$ となる。333333 が 21 で割り切れるから，111111 が 7 で割り切れる。一方，111111 は 3 の倍数なので，111111 は 21 で割り切れる。$\overbrace{11\cdots1}^{k\text{個}}\ (1 \leqq k \leqq 5)$ の中で 3 の倍数になるの

は 111 のみであるが，これは 7 では割り切れない。よって，$f_0 = 6$ となり，定理 1 が成り立っている（$f_0 = g_0 = h_0$ が成立する）。

〔**定理2**〕b が 2, 3, 5 を素因数にもたないとき，$f_0 = g_0 = h_0$ が成り立つ。

証明）$\overbrace{99\cdots9}^{h_0個} = bu_0$ である。$\overbrace{99\cdots9}^{h_0個} = 9\times\overbrace{11\cdots1}^{h_0個}$ より bu_0 は 9 の倍数になるが，b は 3 を素因数にもたないから u_0 が 9 の倍数になる。$u_0 = 9u_1$ とおくと $\overbrace{11\cdots1}^{h_0個} = bu_1$ となるので，$h_0 \in F$。集合 F に属する自然数の最小値が f_0 だから，$f_0 \leqq h_0$。一方，一般に $f_0 \geqq g_0 \geqq h_0$ だから，$f_0 = g_0 = h_0$ が成り立つ。（証明終わり）

〔**命題1**〕b は 2, 5 を素因数にもたず，3 を 1 つだけ素因数にもつとき，$g_0 = h_0$ が成り立つ。

証明）定理 2 の証明において bu_0 は 9 の倍数になるが，b は 3 を素因数に 1 つだけもつため，u_0 は 3 の倍数になる。$u_0 = 3u_1$ とおくと $\overbrace{33\cdots3}^{h_0個} = bu_1$ となるので，$h_0 \in G$。g_0 は，集合 G に属する自然数の最小値だから，$g_0 \leqq h_0$ である。また，一般に $g_0 \geqq h_0$ であったから，$g_0 = h_0$ が成り立つ。

3. 分数の循環節の長さ

この節では，2 でも 5 でも割り切れない整数を分母にもつ既約分数について，それを小数展開したときに現れる循環節の長さを考察する。既約分数の循環節の長さを周期，周期の最小値を基本周期と呼ぶ。このとき，次の定理が成立する。

〔**定理3**〕分母の素因数が 2, 5 以外の素数のみである既約分数について，次の (1)～(3) が成立する。

(1) 既約分数の周期は基本周期の倍数である。

(2) 同一の分母をもつ既約分数の基本周期は，分子によらず一定である。

(3) $b_1, b_2, \cdots, b_m$ は 3 以上の相異なる整数で，どの 2 つも互いに素であるとする。$b_1b_2\cdots b_m$ を分母とする単位分数の基本周期は，$b_i\,(i = 1, 2, \cdots, m)$ を分母とする単位分数の基本周期の最小公倍数に等しい。

証明）

(1) $\dfrac{a}{b}$ を既約な真分数とする。b は 2, 5 以外の素因数のみをもつことから，$\dfrac{a}{b}$ は純循環小数になる。$a \div b$ の計算において，小数点以下の各桁に商を立てたときのあまりは 1 から $b-1$ までのいずれかであるので，鳩の巣原理により $b-1$ 以下の周期が存在する。$\dfrac{a}{b}$ の基本周期を m，任意の周期を n とする（$m \leqq n$）。n を m で割った商を q，あまりを r とする。即ち，$n = mq + r,\ q \geqq 1,\ 0 \leqq r < m$ である。$r > 0$ であったとする。このとき，$\dfrac{a}{b} = 0.a_1a_2a_3\cdots$ と小数展開すると，m, n が周期であることから $a_1 = a_{n+1} =$

$a_{mq+r+1} = a_{r+1}$。同様に $a_2 = a_{r+2}$, $\cdots$, $a_{m-r} = a_{r+(m-r)} = a_m$。$a_{m-r+1} = a_{m+1} = a_1$ より，$m - r$ が周期となってしまい，m が基本周期であることに反する。よって，$r = 0$, 即ち任意の周期 n は基本周期 m の倍数である。

(2) 単位分数 $\frac{1}{b}$ の基本周期を k とすると，$\frac{1}{b} = 0.\dot{c}_1 c_2 \cdots \dot{c}_k = \frac{c}{\underbrace{99\cdots9}_{k個}}$（但し $c = c_1 10^{k-1} + c_2 10^{k-2} + \cdots + c_k$）と表される。これより $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} = \frac{ac}{\underbrace{99\cdots9}_{k個}}$ となり，k が $\frac{a}{b}$ の周期になる。既約分数 $\frac{a}{b}$ の基本周期を k_a とおくと，(1) より k は k_a の倍数であることがわかる。逆に，$\frac{a}{b} = 0.\dot{d}_1 d_2 \cdots \dot{d}_{k_a} = \frac{d}{\underbrace{99\cdots9}_{k_a個}}$ と展開する。ここで，$d = d_1 10^{k_a-1} + d_2 10^{k_a-2} + \cdots + d_k$ である。a と b は互いに素だから，整数 s と t で $as + bt = 1$ を満たすものがとれる。従って，$\frac{1}{b} = t + s \times \frac{a}{b} = t + s \times \frac{d}{\underbrace{99\cdots9}_{k_a個}} = \frac{\overbrace{99\cdots9}^{k_a個} \times t + sd}{\underbrace{99\cdots9}_{k_a個}}$ となって，k_a が $\frac{1}{b}$ の周期となり，再び (1) より k_a は k の倍数になる。以上より $k_a = k$ である。

(3) $m = 2$ のときを示せば，一般の m については数学的帰納法により証明される。b, c を 2 も 5 も素因数にもたない互いに素な 3 以上の整数とする。自然数 s が単位分数 $\frac{1}{b}$ の周期になるための必要十分条件は，$10^s \equiv 1 \pmod{b}$ であることに注意する。合同式 $10^s \equiv 1 \pmod{b}$, $10^s \equiv 1 \pmod{c}$, $10^s \equiv 1 \pmod{bc}$ を満たす最小の自然数（即ち b, c, bc を分母とする単位分数の基本周期）をそれぞれ k, h, f とおき，f が k と h の最小公倍数であることを示す。

k と h の最小公倍数を g とおき, $g = kg_1 = hg_2$ とおくと, $10^g \equiv (10^k)^{g_1} \equiv 1^{g_1} \equiv 1 \pmod{b}$ となる。また，同様に計算して $10^g \equiv 1 \pmod{c}$ もいえる。b と c は互いに素だから，$10^g \equiv 1 \pmod{bc}$ となり，g は f の倍数になる。他方，$10^f \equiv 1 \pmod{bc}$ より $10^f \equiv 1 \pmod{b}$ となり，f は k の倍数。同様に $10^f \equiv 1 \pmod{c}$ より f は h の倍数である。従って，f は k と h の最小公倍数 g の倍数になる。以上のことから，$f = g$ となる。（証明終わり）

4. 与えられた数を基本周期とする真分数の個数

n を自然数とし, 基本周期が n である既約真分数で分母が 2 とも 5 とも互いに素であるものの個数，周期が n である既約真分数で分母が 2 とも 5 とも互いに素であるものの個数をそれぞれ $f(n)$, $F(n)$ で表す。例えば，周期が 1（従って基本周期も 1）で分母が 2 とも 5 とも互いに素な既約真分数は，分母が 3 または 9 のものに限られるから，$f(1) = F(1) = 8$ となる。

定理３の (i) より，$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ である。ここで，$\sum_{d|n}$ は n のすべての約数 d に関する和を意味する。このとき，Möbius の反転公式より $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$ が成り立つ。ここで，$\mu(n)$ は Möbius の

関数である。$n \geqq 2$ とする。$\sum_{d|n}\mu(d)=0$ より，c を任意定数として $f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\left(F\left(\frac{n}{d}\right)+c\right)$ がなりたつので，特に $c=2$ と選ぶ。$F(k)+2=10^k$ だから，$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\cdot 10^{\frac{n}{d}}$ となる。$n=p_1{}^{e_1}p_2{}^{e_2}\cdots p_m{}^{e_m}$ と素因数分解すると，d が素数の平方で割り切れるとき $\mu(d)=0$，d が k 個の相異なる素数の積に等しければ $\mu(d)=(-1)^k$ であるという性質により，$f(n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq m}(-1)^k\cdot 10^{\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}}$ と表される。

例えば，$f(2)=10^2-10^{\frac{2}{2}}=90, f(3)=10^3-10^{\frac{3}{3}}=990, f(4)=10^4-10^{\frac{4}{2}}=10000-100=9900$ である。また，$6=2\times 3$ より，$f(6)=10^6-10^{\frac{6}{2}}-10^{\frac{6}{3}}+10^{\frac{6}{2\cdot 3}}=10^6-10^3-10^2+10=998910$ と計算できる。

参考文献

［1］上垣渉，何森仁，『数と図形の歴史 70 話』，日本評論社，2010
［2］高木貞治，『初等整数論講義　第 2 版』，共立出版，1971
［3］森本清吾，『数論』，共立全書，1953
［4］文部科学省，『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』，実教出版，2009
［5］ピーター・ウィンクラー，『とっておきの数学パズル』，日本評論社，2011